MAGAZINE D'EXERCICES
Limites et continuité

EXERCICE N° 1 | 20' | 4 point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x\sin(\frac{\pi}{x}), & \text{si; } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, & \text{si; } x \geq 0. \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a :$1 + x \leq f(x) \leq 1 - x$
   (b) Montrer que f est continue en 0.
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat .
2. (a) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer l'image de $\mathbb{R}_+$ par f.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une solution unique notée α et que ; $0,5 < \alpha < 0,75$

EXERCICE N° 2 | 25' | 4 point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}, & \text{si; } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+1}}, & \text{si; } x \leq 0. \end{cases}$

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$
   (b) Montrer que f est continue en 0.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par $\begin{cases} g(x) = f(\tan x), & \text{si; } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ g(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$
   (a) Montrer que g est continue à droite en $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on a $g(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = \frac{3}{4}$ admet , dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ une solution unique a.

EXERCICE N° 3 | 20' | 4 point

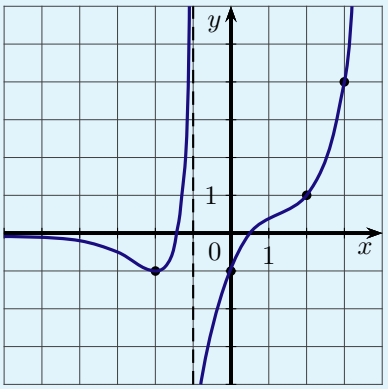
On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

☎ : 23390248 - 29862267

Tous droits réservées ©TakiAcademy.com

- Les droites $\Delta : x = -1$ et $\Delta' : y = 0$ sont des asymptotes à $\mathscr{C}_g$
- $\mathscr{C}_g$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$.

(I) Par lecture graphique déterminer:



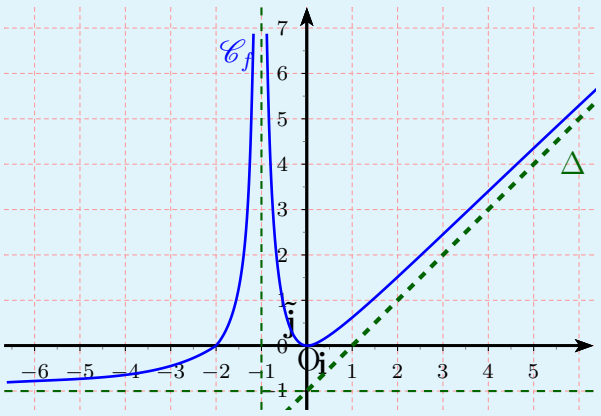
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{1-x}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{g(x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{g(x)+1}$.

(II) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$ et $f = g \circ h$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$

EXERCICE N° 4 — 25' — 5 point

La courbe $\mathscr{C}$ représentée ci dessous est la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On sait que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et que la droite $\Delta' : y = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
On a aussi que $x = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.



1. A l'aide du graphique et des renseignement fournis , déterminer.
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x + 2)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+} f(\dfrac{-x+1}{x+1})$.
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x^2+1)}{x}$.
2. Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1.
3. (a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ f$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f \circ f(x)}{f(x)}$

☎ : 23390248 - 29862267
Tous droits réservées ©TakiAcademy.com